

# Travaux dirigés sur les séries de Volterra: Programmation d'un filtre Moog simplifié en FAUST

M2R ATIAM, UE TSM,  
Thomas Hélie et Yann Orlarey  
helie@ircam.fr, orlarey@grame.fr

**Les documents à rendre pour l'évaluation sont, pour chaque binôme:**

- 1. la préparation du TD (à remettre en début de séance, cf. § 3),**
- 2. un rapport sur la partie pratique (à remettre à une date précisée, cf. § 4).**

Le filtre Moog (Moog Ladder Filter) est apprécié dans la musique électronique pour sa “signature sonore”. Une première qualité est que ce filtre passe-bas a une forte réjection (-48 dB/octave au-delà de la fréquence de coupure). Une seconde est que, pour de grands signaux, les transistors du circuit introduisent des non-linéarités dont l'effet est à la fois audible et typique.

Ces travaux dirigés visent à inclure les premières distorsions qui apparaissent au-delà du régime linéaire, grâce à un développement en séries de Volterra. Dans cette étude, on s'intéressera en premier lieu à une configuration non résonante du filtre, pour laquelle le gain de la boucle de rétro-action est nul. Le problème non simplifié est présenté et sa résolution est laissée comme exercice libre en fin de TD.

## 1 Présentation du filtre Moog

Le circuit du filtre Moog (figure 1) fournit un filtre passe-bas piloté par les paramètres  $I_c$  et  $r$ . Une analyse du circuit montre que le courant  $I_c$  contrôle la pulsation de coupure  $\omega = \frac{I_c}{4CV_T}$  où<sup>1</sup>  $V_T = \frac{k_b T}{q} \approx 25.85$  mV et  $C = 27$  nF pour le Moog Prodigy et  $C = 68$  nF pour le MiniMoog. Le gain de la boucle de rétro-action  $0 \leq r \leq 1$  règle le facteur de qualité de la résonance.

Ce circuit est nourri en entrée par le signal de tension  $V_{in}(t)$  et la tension de sortie utilisée est  $V_4(t)$ . Les équations du circuits sont données par

$$\text{Etage } j \ (j = 1, 2, 3, 4): \quad \frac{1}{\omega} \frac{dv_j}{dt} + \tanh v_j = \tanh v_{j-1}, \quad (1)$$

$$\text{Boucle:} \quad v_0 = v_{in} - 4r v_4, \quad (2)$$

où les  $v_j = \frac{V_j}{2V_T}$  sont des versions adimensionnées des tensions  $V_j$ .

---

<sup>1</sup> $V_T = \frac{k_b T}{q} \approx 25.85$  mV à la température  $T = 300K$  où  $k_b = 1.38 \cdot 10^{-23}$  J/K est la constante de Boltzman et  $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$  C est la charge de l'électron.

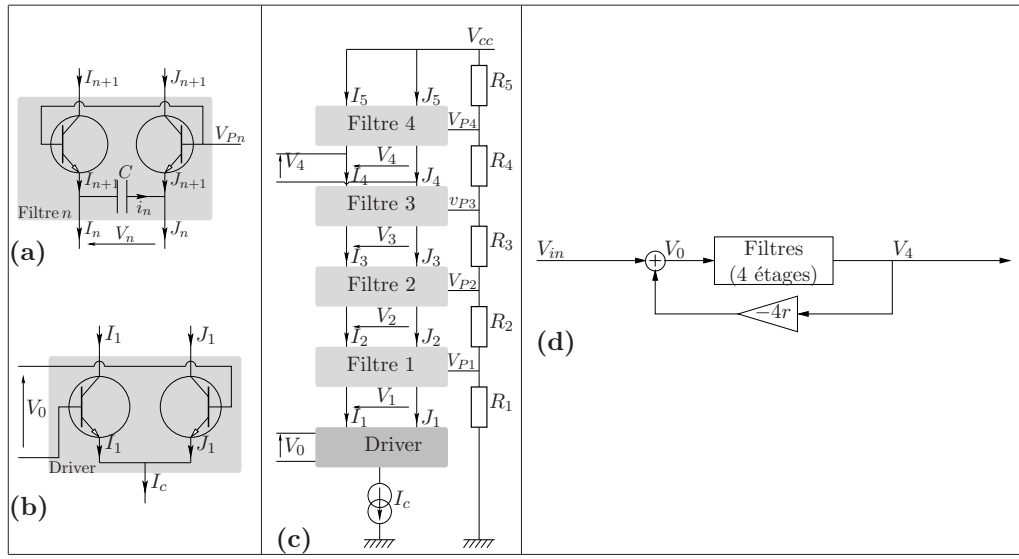


Figure 1: Circuits : (a) filtre à un étage ( $V_{Pn}$ : tension de polarisation), (b) driver, (c) filtre “en échelle” à 4 étages, (d) filtre complet avec rétro-action de gain  $-4r$ .

## 2 Rappels sur les séries de Volterra

### Lois d’interconnexion

On rappelle les 3 lois d’interconnexion suivantes. Les noyaux transfert de Volterra  $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  des systèmes représentés en figures 2a, 2b, et 2c sont donnés respectivement par

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = F_n(s_1, \dots, s_n) + G_n(s_1, \dots, s_n), \quad (3)$$

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = \sum_{p=1}^{n-1} F_p(s_1, \dots, s_p) G_{n-p}(s_{p+1}, \dots, s_n), \quad (4)$$

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = \sum_{p=1}^n \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_p = n \\ i_1, \dots, i_p \geq 1}} F_{i_1}(s_1, \dots, s_{i_1}) \dots F_{i_p}(s_{i_1 + \dots + i_{p-1} + 1}, \dots, s_n) \cdot G_p(s_1 + \dots + s_{i_1}, \dots, s_{i_1 + \dots + i_{p-1} + 1} + \dots + s_n). \quad (5)$$

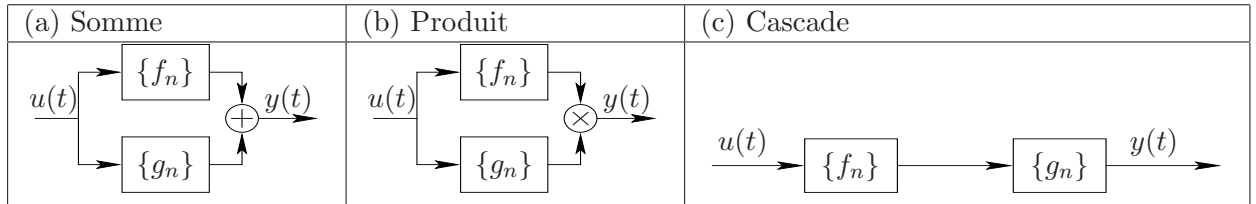


Figure 2: Somme (a), produit (b), et cascade (c) de deux systèmes

### Un résultat utile pour la réalisation de système

A partir des lois d’interconnexion, on déduit le résultat suivant:

le système élémentaire défini en figure 3 a un seul noyau de transfert non nul donné par

$$H_3(s_1, s_2, s_3) = A_1(s_1) B_1(s_2) C_1(s_3) D_1(s_1 + s_2 + s_3), \quad (6)$$

où  $A_1, \dots, D_1$  sont des fonctions de transfert.

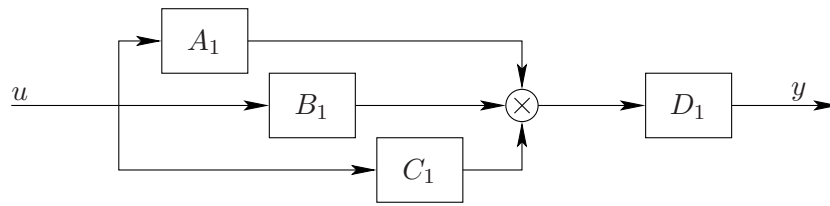


Figure 3: Système élémentaire homogène d'ordre 3.

### 3 Préparation du TD

#### 3.1 Cas d'un étage simple isolé

On s'intéresse d'abord au cas d'un étage simple isolé, d'entrée  $u = v_j$  et de sortie  $y = v_{j+1}$  (cf. (1) et figure 1). On note  $\{F_n\}_{n \geq 1}$  les noyaux de transfert de Volterra de ce système  $\mathcal{F}$ .

**Question 1** On rappelle le développement en série de Taylor de la fonction tangente hyperbolique au voisinage de 0:

$$\tanh x = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n x^n, \quad \text{avec } T_1 = 1, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = -1/3, \quad T_4 = 0, \quad \text{etc.} \quad (7)$$

Quels sont les noyaux de Volterra du système d'entrée  $u$  et de sortie  $y = \tanh(u)$ ? (dans le domaine temporel et celui de Laplace)

**Question 2** Décrire sous forme de schéma fonctionnel (block-diagram), le système annulateur du système  $\mathcal{F}$

**Question 3** En utilisant les lois d'interconnexion, écrire les équations satisfaites par les noyaux  $\{F_n\}$ . Résoudre pour  $n = 1, 2, 3$ .

**Question 4** En s'appuyant sur la réalisation de (6) par la structure donnée en figure 3, donner une réalisation de la série de Volterra tronquée à l'ordre 3 composée de filtres linéaires, sommes et produits. Jusqu'à quel ordre cette réalisation est-elle valable?

#### 3.2 Cas de quatre étages sans boucle de rétro-action

On s'intéresse maintenant à la cascade de 4 étages  $\mathcal{F}$  d'entrée  $u = v_0$  et de sortie  $y = v_4$  (cf. (1) et figure 1). On note  $\{H_n\}_{n \geq 1}$  les noyaux de transfert de Volterra de ce système  $\mathcal{H}$ . Ce système correspond au filtre Moog complet lorsque le gain  $r$  est choisi nul (cf. (2),  $u = v_0 = v_{in}$ ).

**Question 5** En utilisant les lois d'interconnexions, donner les expressions des noyaux de transfert  $H_n$  pour  $n = 1, 2, 3, 4$ .

Remarque: pour simplifier les calculs, on pourra s'intéresser d'abord à cascader de deux étages simples  $\mathcal{F}$  pour obtenir le système  $\mathcal{G}$  (noyaux de transfert  $\{G_n\}$ ) puis à la cascade de deux systèmes  $\mathcal{G}$  pour obtenir le système  $\mathcal{H}$ .

**Question 6** Donner une réalisation de la série de Volterra tronquée à l'ordre 3 du système  $\mathcal{F}$ , construite à partir de la réalisation obtenue à la question 4.

## 4 Partie 2: simulation numérique et implantation en FAUST

### 4.1 Schéma de discrétisation pour la simulation numérique

Pour simuler la structure complète, on a besoin d'une version numérique du filtre de fonction de transfert  $F_1$ . Dans ce TD, on propose d'approcher la dérivée temporelle de  $t \mapsto x(t)$  par le schéma dit d'Euler implicite<sup>2</sup>  $\frac{dx(t_k)}{dt} \approx (x(t_k) - x(t_{k-1}))/T$ , qui revient à approcher  $s$  (domaine de Laplace) par

$$s \equiv \frac{1 - z^{-1}}{T} = S(z) \quad (8)$$

**Question 7** Déterminer la version en  $z$  de la fonction de transfert  $F_1$  et écrire l'équation récurrente associée pour les signaux échantillonnés  $u_n$  (entrée) et  $y_n$  (sortie).

(On introduira la pulsation réduite  $\nu = T\omega$ )

### 4.2 Programmation en FAUST

**Question 8** Réaliser en FAUST la version numérique de  $F_1$ .

**Question 9** Construire la réalisation non linéaire d'ordre 3 d'un simple étage.

**Question 10** Construire la version à 4 étages (non linéaire d'ordre 3).

**Question 11** A partir de quelle amplitude de signal la distorsion commence-t-elle à être perceptible. Jusqu'à quel ordre de grandeur le son obtenu est-il sensé être réaliste?

**Question 12** La stabilité de cette version est-elle garantie lorsqu'on fait varier  $\omega$  dans le temps? Pourquoi?

### 4.3 Rapport (à remettre à une date précisée en séance)

**Question 13** A l'issue de la séance, construire la documentation automatique de votre code final, en incluant tous les commentaires utiles à cette documentation. Fournir également les réponses aux questions de la partie 2.

---

<sup>2</sup>Ce schéma garantit que la version discrétisée d'un filtre causal stable à temps continu est causale stable (en fait, elle est même sur-stabilisée). Un schéma plus fin qui préserve les domaines de stabilité et d'instabilité est obtenu avec la transformée bilinéaire  $s \equiv (2/T)(1 - z^{-1})/(1 + z^{-1})$ . Vous pourrez tester ce schéma et comparer les résultat sonores obtenus.

## 5 Exercice libre: filtre Moog bouclé

On considère le circuit avec la boucle de rétro-action indiquée en figure 1(d) et représentée par (2), avec  $0 \leq r \leq 1$ . On note  $\mathcal{L}$ , le système d'entrée  $u = v_{in}$

$$u = v_0 + 4r v_4 \quad (9)$$

et de sortie  $y = v_4$ . On note  $\{L_n\}$  les noyaux de transfert de ce système.

**Question 14** *Décrire sous forme de schéma fonctionnel, le système annulateur du système  $\mathcal{L}$  en exploitant (9) et le système  $\mathcal{H}$  de noyaux  $\{H_n\}$ .*

**Question 15** *Donner les équations satisfaites par les noyaux de transfert  $L_n$  et montrer que, après calculs, les trois premiers noyaux peuvent se mettre sous la forme*

$$L_1(s_1) = R(s_1) H_1(s_1), \quad (10)$$

$$L_2(s_1, s_2) = 0, \quad (11)$$

$$L_3(s_1, s_2, s_3) = R(s_1)R(s_2)R(s_3) H_3(s_1, s_2, s_3) R(s_1+s_2+s_3). \quad (12)$$

*Que vaut  $R$  ?*

**Question 16** *En déduire une réalisation de  $\mathcal{L}$  qui encapsule celle de  $\mathcal{H}$  par deux versions de  $R$ .*

**Question 17** *Donner la version en  $z$  de  $R$  et implanter la structure obtenue ci-dessus en FAUST. Ce système est-il garanti stable pour des paramètres constants  $\omega > 0$  et  $0 \leq r < 1$ ? L'est-il encore pour des paramètres variant dans le temps? Que pourrait-on proposer pour corriger ce défaut?*